ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. Н. ЖИРАБОК

Дальневосточный государственный технический университет, Владивосток

PLANNING OF EXPERIMENTS TO CONSTRUCT MATHEMATICAL MODELS

A. N. ZHIRABOK

The fundamental concepts of the theory of planning of experiment are described. The linear and quadratic plans, and the methods of completed model analysis, are presented.

Изложены основные понятия теории планирования эксперимента. Приведены линейные и квадратичные планы и методы анализа построенных моделей.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели играют важную роль при изучении различных явлений и создании новых технических систем. Многочисленные примеры различных моделей содержатся в каждом выпуске “Соросовского Образовательного Журнала”, в частности, интересные модели приведены в работе [1]. Еще несколько десятилетий назад при проектировании сложных объектов (самолетов, судов, мостов и др.) использовали в основном физические модели – макеты, то есть уменьшенные копии этих объектов. На них проводили многочисленные натурные эксперименты, выявляли слабые и сильные стороны проекта, полученные результаты затем использовали при создании этих объектов.

В настоящее время благодаря успехам вычислительной техники и наличию разнообразных математических моделей стало возможным вместо натурных проводить вычислительные эксперименты, которые имеют преимущества перед натурными. Они существенно удешевляют и ускоряют процесс проектирования, позволяют проверить, как будет вести себя проектируемый объект в ситуациях, которые трудно организовать в натурных условиях. Кроме того, вычислительные эксперименты, как правило, позволяют найти не просто хорошие, а оптимальные решения. Многочисленные примеры таких экспериментов можно найти в книге [2], а также в других работах Н.Н. Моисеева.

Несмотря на достоинства вычислительных экспериментов, без натурных обойтись полностью нельзя. Они прежде всего нужны для построения математических моделей таких явлений, процессов и объектов, которые пока еще слабо изучены. Мы рассмотрим некоторые положения теории планирования эксперимента, которая подсказывает, как организовать эксперимент и обработку его результатов, чтобы извлечь из них максимум информации.

Рассмотрим вначале простую задачу, которая нередко фигурирует в литературе по теории планирования эксперимента.

Требуется определить веса предметов A, B, C с помощью обычных весов. Для взвешивания используется чашка, вес которой неизвестен. Традиционный подход состоит в том, что вначале взвешивается пустая чашка, на которую затем по очереди кладут предметы и определяют вес каждого из них вместе с чашкой. Такой эксперимент может быть наглядно представлен табл. 1, в которой знаками + и – отмечено соответственно наличие и отсутствие предмета на чашке. Веса предметов рассчитываются очевидным образом, например для предмета A соответствующее выражение имеет вид

$$W_A = W_2 - W_1,$$

где W_1 и W_2 – результаты взвешиваний в первом и втором опытах соответственно.

Таблица 1

Номер опыта	Предметы			Вес
	A	B	C	
1	–	–	–	W_1
2	+	–	–	W_2
3	–	+	–	W_3
4	–	–	+	W_4

Любые измерения сопровождаются большими или меньшими погрешностями, что позволяет рассматривать результаты измерений как совокупность случайных величин. Одной из важнейших характеристик случайной величины является дисперсия, которая показывает степень ее сосредоточенности относительно среднего значения. В нашем случае дисперсия позволяет оценить уровень погрешностей в измерениях и точность определения весов. Будем предполагать, что измерения производятся независимо друг от друга и имеют одинаковую дисперсию D. Тогда точность определения весов предметов может быть оценена следующим образом:

$$\mathrm{D}[W_A] = \mathrm{D}[W_2 - W_1] = \mathrm{D}[W_2] + \mathrm{D}[W_1] = 2\mathrm{D}. \qquad (1)$$

Проведем эксперимент иным путем, взвесив вначале все три предмета, а уже затем по одному (табл. 2). В этом случае веса рассчитываются несколько более сложным образом:

$$W_A = 0{,}5(W_1' + W_2' - W_3' - W_4').$$

Обратим внимание на то, что в последнюю формулу веса́ W_1', W_2', W_3', W_4' входят со знаками, стоящими в столбце для предмета A. Это не случайно, в чем предлагается убедиться читателю, самостоятельно получив формулы для весов предметов B и C.

Найдем точность определения веса:

Таблица 2

Номер опыта	Предметы			Вес
	A	B	C	
1	+	+	+	W_1'
2	+	–	–	W_2'
3	–	+	–	W_3'
4	–	–	+	W_4'

$$\mathrm{D}[W_A] = 0{,}25(\mathrm{D}[W_1'] + \mathrm{D}[W_2'] + \mathrm{D}[W_3'] + \mathrm{D}[W_4']) = \mathrm{D}.$$

Сравнивая этот результат с полученным по выражению (1), можно сделать вывод, что правильно спланированный эксперимент позволил без дополнительных затрат повысить точность определения веса. Этого удалось добиться за счет того, что при вычислении веса во втором случае использовали результаты всех четырех опытов, в то время как в первом – только двух.

Рассмотрим еще один пример. Пусть известно, что две переменные z и y связаны линейной зависимостью

$$y = \alpha z + \beta, \qquad (2)$$

но значения коэффициентов α и β неизвестны, например ток и напряжение связаны зависимостью $U = RI$ (закон Ома), здесь $\beta = 0$. Для определения значений коэффициентов α и β было проведено несколько опытов, в которых переменные z и y приняли значения z_1, z_2, ..., z_m и y_1, y_2, ..., y_m. Из-за погрешностей, неизбежных при проведении опытов, точки с координатами (z_1, y_1), (z_2, y_2), ..., (z_m, y_m) не лежат на одной прямой, а группируются возле нее, как показано на рис. 1. Для вычисления значений коэффициентов α и β, наилучшим образом описывающих результаты проведенных опытов, воспользуемся методом наименьших квадратов. Согласно этому методу, коэффициенты должны выбираться так, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей между измеренными значениями переменной y в каждой точке и теми ее значениями, которые предсказаны с помощью модели (2):

$$S = \sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (\alpha z_i + \beta))^2 \longrightarrow \min.$$

Стандартная техника решения таких задач (взятие производных по α и β, составление системы уравнений и ее решение) приводит к следующему результату:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i z_i - m\bar{z}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{m} (z_i)^2 - m(\bar{z})^2}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{z}, \qquad (3)$$

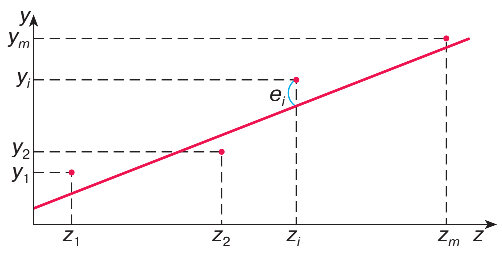

Рис. 1. Результаты эксперимента

где

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i;$$

в теории планирования эксперимента принято обозначать значения коэффициентов, вычисленные по результатам опытов, латинскими буквами.

Рассмотренный эксперимент называется пассивным, так как он не предполагает специальных действий по выбору значений переменной z, они могут быть произвольными. В отличие от этого в активном эксперименте задача выбора этих значений является одной из главных. Ниже будем рассматривать именно такие эксперименты.

МАТРИЦА ПЛАНИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим общий случай, когда имеются n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ (будем называть их входными переменными или факторами) и выходная переменная y – отклик. Требуется выяснить, какой зависимостью связаны $x_1, x_2, ..., x_n$ и y.

Эту задачу можно рассматривать как задачу построения модели устройства с n входами $x_1, x_2, ..., x_n$ и выходом y (рис. 2). Простейшей является линейная модель

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n; \tag{4}$$

нередко ее бывает вполне достаточно для достижения заданных целей. Для определения величин коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ необходимо провести опыты, в каждом из которых факторы $x_1, x_2, ..., x_n$ принимают определенные значения. Число таких значений зависит от поставленной задачи; если нас удовлетворяет модель (4), то достаточно двух значений для каждого фактора. В случае одного фактора это объясняется тем, что прямую линию можно провести через две точки. Для построения квадратичной модели двух уровней уже недостаточно, это же, очевидно, относится и к более сложным моделям.

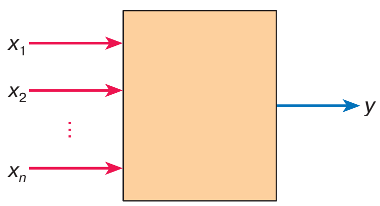

Рис. 2. Заданное устройство

Рассмотрим вначале задачу планирования эксперимента для построения линейных моделей. В этом случае каждый фактор будет принимать два значения: верхнее $x_i^{в}$ и нижнее $x_i^{н}$. Для построения модели и дальнейшего ее анализа оказывается удобным перейти к так называемым кодированным факторам $\tilde{x}_i$:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - 0{,}5(x_i^{в} + x_i^{н})}{0{,}5(x_i^{в} - x_i^{н})}, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

каждый из которых принимает значения +1 (при $x_i = x_i^{в}$) и –1 (при $x_i = x_i^{н}$); чаще будем писать просто + и –. Как будет видно из дальнейшего, такой переход производится не случайно.

Полным факторным экспериментом называется такой эксперимент, в котором каждый фактор независимо от других принимает два значения. В случае n факторов число опытов в таком эксперименте составляет $N = 2^n$, поэтому полный факторный эксперимент часто называют экспериментом 2^n.

Рассмотрим подробно случай, когда $n = 2$; там, где это возможно, будем приводить формулы для произвольного n.

План проведения опытов и их результаты заносят в таблицу, называемую **матрицей планирования**, где значения факторов приводятся в кодированном виде, значения отклика – в реальном масштабе. Матрица плана 2^2 представлена в табл. 3, наглядно этот план изображен на рис. 3.

Матрица планирования имеет ряд свойств, наиболее важными из которых для нас являются следующие три:

а) **симметричность** – сумма всех элементов столбца каждого фактора равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n; \tag{5}$$

Таблица 3

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y
1	+1	+1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	–1	–1	y_4

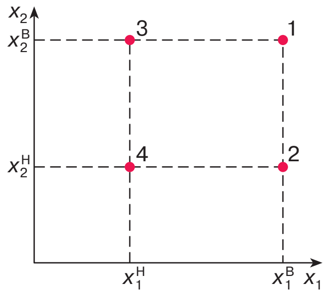

Рис. 3. План 2^2 в двухмерном факторном пространстве

б) **нормированность** – сумма квадратов всех элементов каждого столбца не зависит от рассматриваемого фактора и равна N:

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_{ij}^2 = N, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (6)$$

в) **ортогональность** – сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов разных факторов равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_{ij}\tilde{x}_{kj} = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad i \neq k. \qquad (7)$$

Символом $\tilde{x}_{ij}$ обозначено значение i-го фактора в j-м опыте. Эти свойства матрицы планирования будут использованы ниже.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Для кодированных факторов модель (4) при $n = 2$ имеет вид

$$y = \beta_0 + \beta_1\tilde{x}_1 + \beta_2\tilde{x}_2;$$

между коэффициентами α_0, α_1, α_2 и β_0, β_1, β_2 имеются определенные связи, конкретный вид которых для нас несуществен.

Значения коэффициентов β_0, β_1, β_2, как и выше, найдем методом наименьших квадратов. Для этого составим искомую сумму квадратов:

$$S = \sum_{j=1}^{N} (y_j - (\beta_0 + \beta_1\tilde{x}_{1j} + \beta_2\tilde{x}_{2j}))^2, \qquad (8)$$

найдем производные по параметрам β_0, β_1, β_2 и приравняем их к нулю; результат приведем только для коэффициента β_1:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2\sum_{j=1}^{N} (y_j - \beta_0 - \beta_1\tilde{x}_{1j} - \beta_2\tilde{x}_{2j})\tilde{x}_{1j} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$2\sum_{j=1}^{N} (y_j - \beta_0 - \beta_1\tilde{x}_{1j} - \beta_2\tilde{x}_{2j})\tilde{x}_{1j} =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{N} (y_j\tilde{x}_{1j} - \beta_0\tilde{x}_{1j} - \beta_1\tilde{x}_{1j}^2 - \beta_2\tilde{x}_{2j}\tilde{x}_{1j}) =$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{N} y_j\tilde{x}_{1j} - \beta_0\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_{1j} - \beta_1\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_{1j}^2 - \beta_2\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_{2j}\tilde{x}_{1j}\right) = 0.$$

Второе и четвертое слагаемые обращаются в нуль из-за свойств (5) и (7) соответственно, и уравнение существенно упрощается. Приведем итоговые формулы для всех трех коэффициентов:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j, \qquad b_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j\tilde{x}_{1j}, \qquad b_2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j\tilde{x}_{2j}.$$

Для единообразия записи в матрицу обычно вводится столбец фиктивной переменной $\tilde{x}_0$, которая принимает только одно значение +1. Формула для подсчета значений коэффициентов тогда приобретает такой вид:

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j\tilde{x}_{ij}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Для плана 2^2 получаем следующее:

$$b_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \qquad b_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4),$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4).$$

Сравнивая эти выражения с матрицей табл. 3, можно сделать вывод о том, что в формулы для оценок коэффициентов значения отклика входят с теми знаками, которые расположены в столбце соответствующего фактора.

Формула (9) справедлива для однократных опытов; в случае кратных, когда в каждой точке плана, то есть для каждой комбинации значений факторов, проводится r опытов, выражение для коэффициентов будет иметь следующий вид:

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \bar{y}_j\tilde{x}_{ij}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\bar{y}_j$ – среднее значение отклика в j-й строке плана:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} y_{jl},$$

y_{jl} – значение отклика в j-м опыте при l-м его повторении.

Из-за различных погрешностей, с неизбежностью сопровождающих процесс измерений, числа b_0, b_1, ..., b_n являются случайными; можно показать, что они независимы благодаря свойствам (5)–(7) матрицы планирования. Последнее обстоятельство является очень важным по следующей причине. При изучении малоисследованного процесса или объекта в описывающую его модель на первых порах могут быть включены факторы, которые на самом деле совсем не влияют на отклик y или влияют незначительно. При последующем анализе такие факторы будут удалены из модели, при этом оставшиеся факторы остаются в модели с ранее рассчитанными коэффициентами.

В отличие от этого коэффициенты, вычисленные по формуле (3), оказываются зависимыми, что явно следует из выражения для b. Более того, если окажется, что из каких-либо соображений в модели (2) необходимо принять $\beta = 0$ (например, для закона Ома), то формула для расчета значения коэффициента α изменится и примет вид

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{m} z_i^2}.$$

Еще одно преимущество активного эксперимента над пассивным состоит в простоте и универсальности формул для расчета коэффициентов модели и процедур анализа модели – они не зависят от физической природы факторов $x_1, x_2, ..., x_n$, поскольку все операции производятся с кодированными факторами и только на последнем этапе производится переход к исходным переменным.

АНАЛИЗ МОДЕЛИ

Для дальнейшего нам потребуется знать точность эксперимента, которую можно оценить так называемой дисперсией воспроизводимости S_y^2:

$$S_y^2 = \frac{1}{N(r-1)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{r}(y_{jl} - \bar{y}_j)^2.$$

Эта дисперсия показывает, насколько хорошо воспроизводятся (повторяются) значения отклика в случае постановки нескольких опытов при неизменных значениях факторов, то есть она характеризует величину помех (погрешностей) в эксперименте, иначе, точность эксперимента.

Анализ модели начнем с проверки значимости коэффициентов. Смысл ее состоит в том, чтобы выяснить, равны ли нулю некоторые коэффициенты модели, иными словами, все ли факторы существенно (по сравнению с помехой) влияют на отклик. Для этого необходимо сравнить разность между вычисленным значением коэффициента и нулем (или, что то же самое, модуль этого значения) с величиной среднеквадратичной ошибки определения этой оценки. Если они одного порядка, то факт отличия оценки от нуля можно объяснить помехами, то есть случайными причинами. В этом случае проверяемый коэффициент считается незначимо (несущественно) отличным от нуля и соответствующий фактор удаляется из модели. В противном случае говорят, что он значим, то есть действительно не равен нулю; соответствующий фактор тогда остается в модели.

Формально эта проверка производится следующим образом. Для каждого коэффициента b_i вычисляется отношение

$$t_i = \frac{|b_i|(Nr)^{1/2}}{(S_y^2)^{1/2}} \tag{10}$$

и сравнивается с $t_{кр} = t(p, s)$ – табличным значением распределения Стьюдента с $s = N(r-1)$ степенями свободы, соответствующим уровню значимости p. В качестве p выбирается такое число, что событие с этой вероятностью считается практически невозможным; обычно полагают $p = 0{,}05$. Правило принятия решения выглядит следующим образом: если $t_i > t_{кр}$, то коэффициент β_i значим; если $t_i \le t_{кр}$, коэффициент β_i признается незначимо отличным от нуля и соответствующий ему фактор исключается из модели. Из-за наличия помех решение может быть ошибочным, в частности незначимый коэффициент может быть принят за значимый, однако вероятность такого события не превосходит p.

Следующий этап анализа модели состоит в проверке ее адекватности, то есть проверки того, насколько точно построенная модель описывает проведенный эксперимент. Суть ее состоит в следующем. Оцененную некоторым образом степень рассогласования модели и эксперимента сравнивают с величиной помех в эксперименте. Если они одного порядка, то, очевидно, расхождение между моделью и экспериментом вызвано случайными причинами и модель считается адекватной. В противном случае необходимо признать, что это расхождение не случайно и модель плохо описывает эксперимент, то есть неадекватна.

Формально проверка адекватности производится следующим образом. Степень рассогласования модели и эксперимента оценивается так называемой дисперсией адекватности $S^2_{\text{ад}}$:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{r}{N-L}\sum_{j=1}^{N}(\bar{y}_j - (b_0 + b_1\tilde{x}_{1j} + \ldots + b_n\tilde{x}_{nj}))^2, \qquad (11)$$

где L – число членов в модели (при подсчете числа L учитываются свободный член b_0 и те члены модели, которые остались в ней после проверки на значимость). Сравнивая выражения (8) и (11) и вспоминая основную идею метода наименьших квадратов, можно сделать вывод о том, что дисперсия адекватности имеет минимально возможное значение и никаким более удачным выбором оценок коэффициентов ее нельзя уменьшить. Выражение (11) можно упростить, используя свойства матрицы планирования:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{r}{N-L}\left(\sum_{j=1}^{N}\bar{y}_j^2 - N(b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2)\right). \qquad (12)$$

Далее составляется отношение F:

$$F = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_y}$$

и сравнивается с $F_{\text{кр}} = F(p, n_1, n_2)$– табличным значением распределения Фишера с $n_1 = N - L$ и $n_2 = N(r-1)$ степенями свободы; p – выбранный уровень значимости. Если $F > F_{\text{кр}}$, то модель неадекватна, при $F \le F_{\text{кр}}$ она признается адекватной. Во втором случае правильнее говорить так: у нас нет достаточных оснований, чтобы считать модель неадекватной, или гипотеза об адекватности не противоречит опытным данным. Это следует из общих соображений по процедуре проверки гипотез. Вероятность признать адекватную модель неадекватной не превосходит p.

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНОВ

В том случае, когда построенная модель неадекватна, можно попытаться ее улучшить, введя в нее нелинейные члены, которые учитывали бы произведения факторов. Существенно при этом, что новые опыты проводить не нужно.

Рассмотрим в качестве примера полную матрицу плана 2^3, в которую дополнительно к столбцам факторов введены столбцы их произведений (табл. 4). Можно показать, что новая матрица сохраняет все свойства старой: симметричность, нормированность, ортогональность. Значения коэффициентов при произведениях рассчитываются, как и выше, методом наименьших квадратов, что дает

$$b_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\bar{y}_l\tilde{x}_{il}\tilde{x}_{jl}, \qquad j, i = 1, 2, \ldots, n, \qquad i \ne j,$$

Таблица 4

	$\tilde{x}_0$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\bar{y}$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	$\bar{y}_1$
2	+	+	+	–	+	–	–	–	$\bar{y}_2$
3	+	+	–	+	–	+	–	–	$\bar{y}_3$
4	+	+	–	–	–	–	+	+	$\bar{y}_4$
5	+	–	+	+	–	–	+	–	$\bar{y}_5$
6	+	–	+	–	–	+	–	+	$\bar{y}_6$
7	+	–	–	+	+	–	–	+	$\bar{y}_7$
8	+	–	–	–	+	+	+	–	$\bar{y}_8$

$$b_{jik} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\bar{y}_l\tilde{x}_{il}\tilde{x}_{jl}\tilde{x}_{kl}, \qquad j, i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad i \ne j \ne k,$$

для парных и тройных произведений соответственно. Так, формула для коэффициента b_{23} выглядит следующим образом:

$$b_{23} = \frac{1}{8}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6 - \bar{y}_7 + \bar{y}_8).$$

Для адекватного описания поверхности отклика в сильно искривленной области, например в области оптимума, добавление в модель произведений факторов уже не дает должного эффекта, то есть выполнения требования адекватности, здесь необходимо учитывать квадраты факторов. Линейные планы, рассмотренные выше, не позволяют это сделать; здесь необходим более сложный эксперимент, в котором помимо точек с координатами ± 1 должны присутствовать другие точки. Обычно в качестве таких точек выбираются центральная точка с координатами (0, 0, ..., 0) и так называемые звездные точки на осях факторного пространства с координатами ($\pm\gamma$, 0, ..., 0) (0, $\pm\gamma$, ..., 0), ..., (0, 0, ..., $\pm\gamma$) (рис. 4). В задачу планирования теперь входят задачи определения числа опытов в центре плана n_0 и величины "звездного" плеча γ, которые связаны между собой определенной зависимостью.

Квадратичная модель для двух факторов имеет вид

$$y = \beta'_0 + \beta_1\tilde{x}_1 + \beta_2\tilde{x}_2 + \beta_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + \beta_{11}\tilde{x}_1^2 + \beta_{22}\tilde{x}_2^2.$$

Нетрудно видеть, что соответствующая ей матрица не обладает свойством симметричности, поскольку столбцы для квадратичных членов содержат только неотрицательные элементы, сумма которых не будет равна нулю. Для устранения этого недостатка квадраты факторов $\tilde{x}_1^2$ и $\tilde{x}_2^2$ заменим соответственно на

$$\tilde{x}'_1 = \tilde{x}_1^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_{1j}^2 \quad \text{и} \quad \tilde{x}'_2 = \tilde{x}_2^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{x}_{2j}^2$$

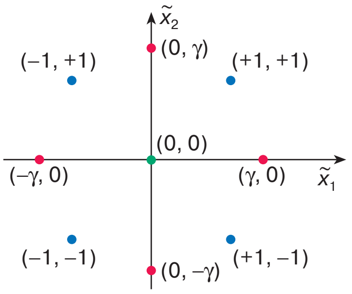

Рис. 4. Размещение точек квадратичного плана при $n = 2$

и тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{x}'_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2;$$

$N = 2^n + 2n + n_0$ – общее число опытов.

В отличие от линейных квадратичные планы уже не могут быть одновременно ортогональными и нормированными. Выбор в пользу ортогональности приводит к тому, что число опытов в центре плана может выбираться произвольно, а γ определяется по формуле

$$\gamma = (0{,}5((2^n N)^{1/2} - 2^n))^{1/2}.$$

В частности, для $n = 2$ и $n_0 = 1$ получим $\gamma = 1$; матрица плана приведена в табл. 5, где символом N_z обозначена сумма квадратов элементов соответствующего столбца. Из-за невыполнения свойства нормированности числа N_z отличаются друг от друга.

После проведения эксперимента и вычисления значений коэффициентов производится анализ построенной модели. По сути он не отличается от рассмотренного выше анализа линейных моделей, несколько изменяются только формулы (10) и (12). Так, в (10) число N заменяется на N_z, соответствующее проверяемому коэффициенту; в (12) аналогичная замена приводит к следующему выражению для случая $n = 2$, $n_0 = 1$:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{9} y_i^2 - 9b_0^2 - 6b_1^2 - 6b_2^2 - 4b_{12}^2 - 2b_{11}^2 - 2b_{22}^2;$$

множители перед коэффициентами взяты из табл. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены основные понятия теории планирования эксперимента. Из-за ограниченного объема статьи в стороне остались такие важные вопросы, как уменьшение числа опытов по сравнению с 2^n (так называемые дробные факторные планы), анализ критериев оптимальности планов, возможные варианты использования построенных моделей (например, поиск таких значений факторов, при которых отклик принимает максимальное или минимальное значение) и др. Более детально с этими вопросами можно познакомиться по книгам [3, 4].

Таблица 5

	$\tilde{x}_0$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}'_1$	$\tilde{x}'_2$	y
1	+	+	+	+	1/3	1/3	y_1
2	+	+	–	–	1/3	1/3	y_2
3	+	–	+	–	1/3	1/3	y_3
4	+	–	–	+	1/3	1/3	y_4
5	+	+1	0	0	1/3	–2/3	y_5
6	+	–1	0	0	1/3	–2/3	y_6
7	+	0	+1	0	–2/3	1/3	y_7
8	+	0	–1	0	–2/3	1/3	y_8
9	+	0	0	0	–2/3	–2/3	y_9
N_z	9	6	6	4	2	2	

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю.И.* Простые математические модели и их роль в постижении мира // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 3. С. 139–143.

2. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.

3. *Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1971. 279 с.

4. *Асатурян В.И.* Теория планирования эксперимента. М.: Радио и связь, 1983. 248 с.

Рецензент статьи Ю.Г. Мартыненко

* * *

Алексей Нилович Жирабок, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой конструирования и производства радиоаппаратуры Дальневосточного государственного технического университета. Область научных интересов – теория нелинейных динамических систем, техническая диагностика сложных технических систем. Автор более 130 научных работ, в том числе двух монографий.